FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA

Aula 16

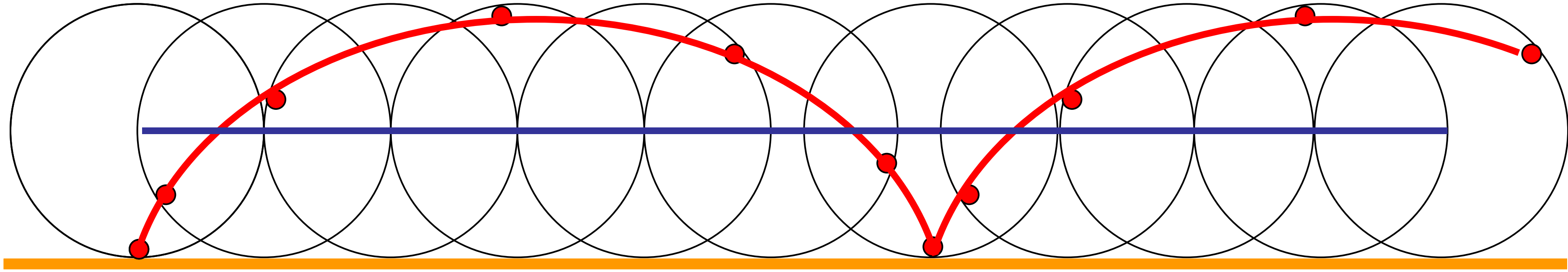
Rotação, momento de uma força e momento angular

Sumário

- O Rolamento como combinação de translação e rotação
- A energia cinética do rolamento
- As forças envolvidas no rolamento

Um corpo que rola

Movimento de rolamento → Translação+rotação em torno de eixo que passa por CM



A curva a vermelho mostra a trajectória de um ponto na extermidade de um corpo que rola

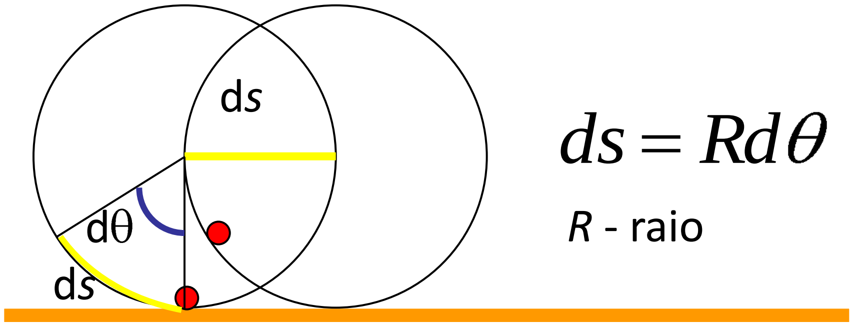
Esta trajectória é denominada ***ciclóide***

A linha a azul é a trajectória do centro de massa do corpo

Movimento de Rolamento

O movimento de rolamento puro corresponde a rolamento sem escorregamento;

Neste caso, existe uma relação simples entre os movimentos de rotação e de translação;



$$ds = Rd\theta$$

R - raio

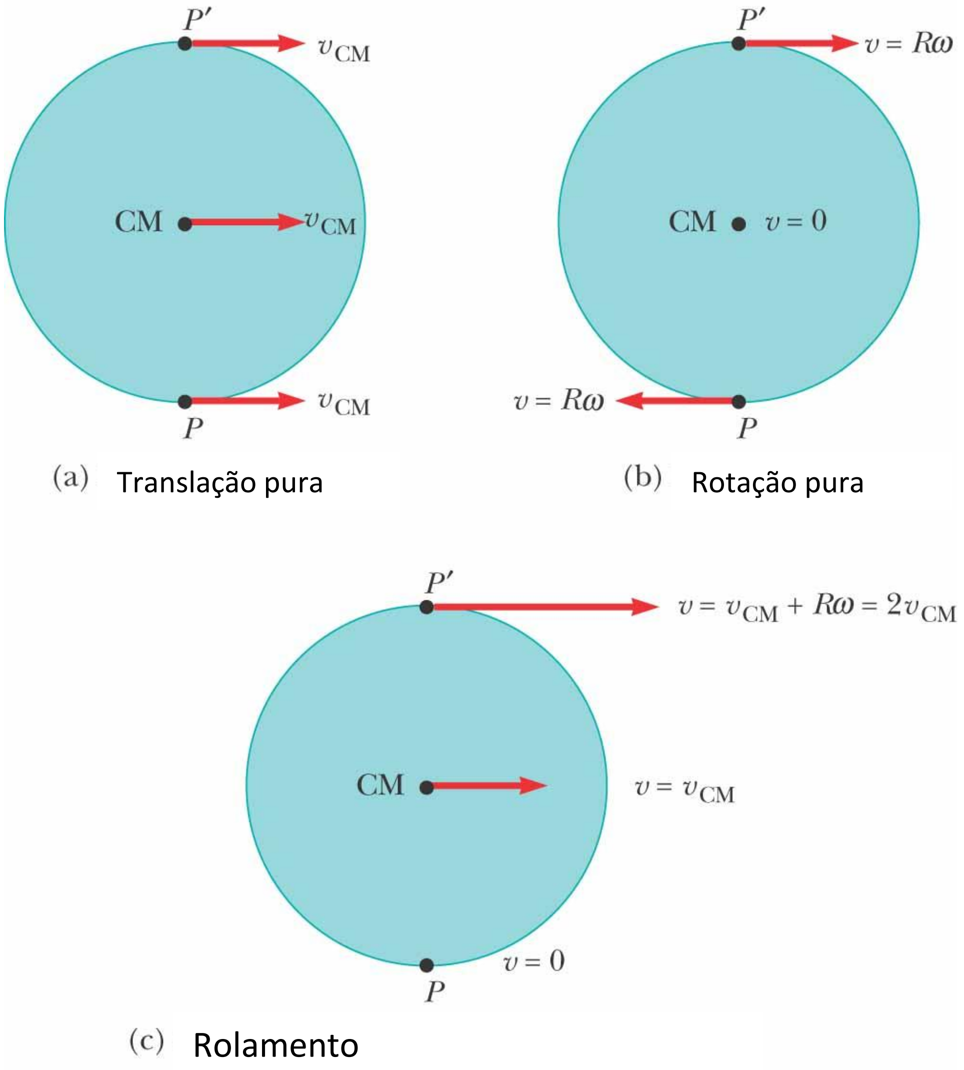
$$\frac{ds}{dt} = R\frac{d\theta}{dt}$$

$$v_{CM} = R\omega$$

$$a_{CM} = R\alpha$$

Rolamento

O rolamento pode ser considerado uma combinação de um movimento de translação pura e um movimento de rotação pura



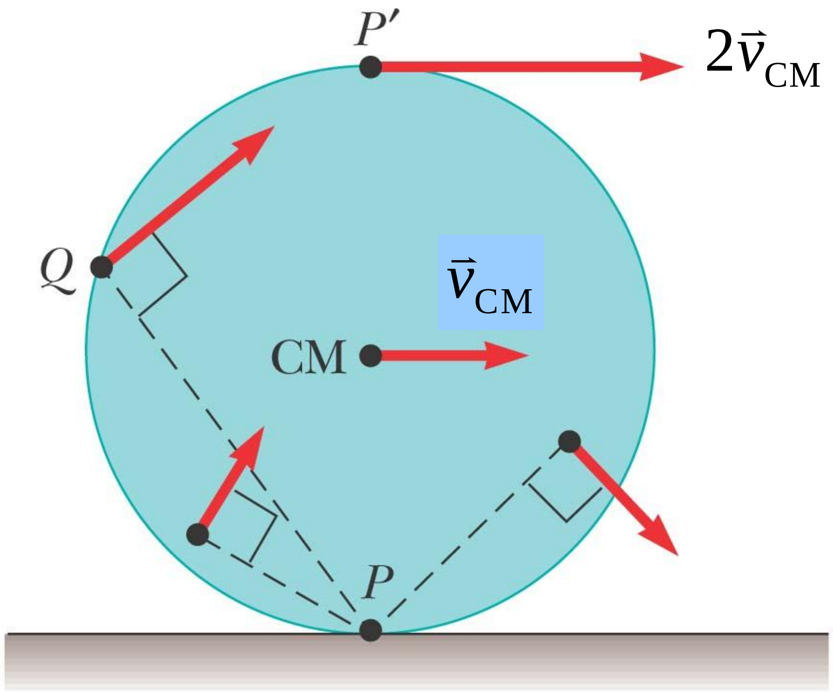
Rolamento

Um ponto da extermidade em contacto com o solo, *P*, roda para várias posições, *Q* e *P '*;

Em cada instante, o ponto em contacto com o solo, *P*, está em repouso em relação à superfície, porque não há escorregamento;

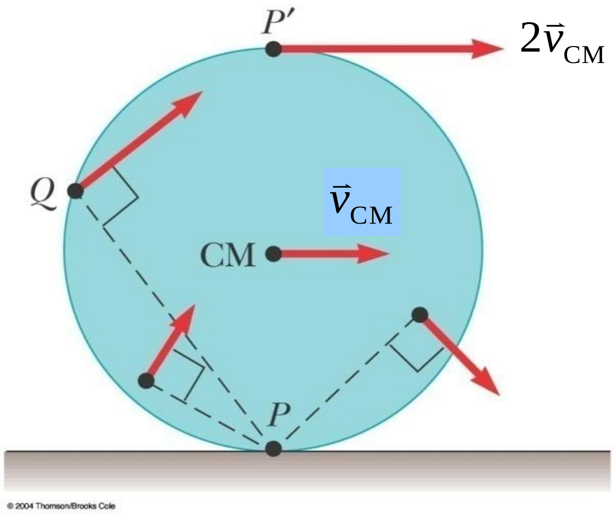
Em cada instante, o movimento pode ser considerado de rotação pura em torno de P:

$$v_{P'} = \omega \times 2R = 2 \times \omega R = 2v_{CM}$$



Energia Cinética de um Corpo a Rolar

Como o movimento pode ser considerado, em cada momento, de rotação pura em torno de um eixo passando por P,



$$E_C = \frac{1}{2} I_P \omega^2$$

Mas o teorema dos eixos paralelos diz:

$$I_P = I_{CM} + MR^2$$

e

$$E_C = \frac{1}{2} I_{CM} \omega^2 + \frac{1}{2} MR^2 \omega^2$$

Energia Cinética de um Corpo a Rolar

$$E_C = \frac{1}{2} I_{CM} \omega^2 + \frac{1}{2} M R^2 \omega^2$$

Mas

$$\omega R = v_{CM}$$

A energia cinética de um corpo a rolar é a soma da energia de translação do seu centro de massa e a energia cinética de rotação em torno do centro de massa:

$$E_C = \frac{1}{2} I_{CM} \omega^2 + \frac{1}{2} M v_{CM}^2$$

Conservação da Energia Mecânica

Apesar da força de atrito, não há perda de energia mecânica porque o ponto de contacto está em cada instante em repouso relativamente à superfície.

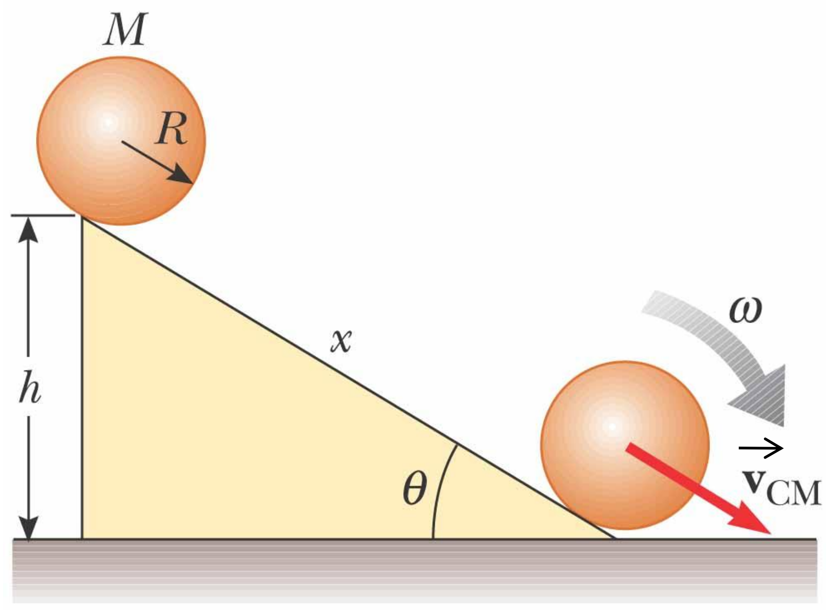
Seja $U_g = 0$ na base do plano:

$E_{cf} + U_{gf} = E_{ci} + U_{gi}$

$E_{cf} = ½\, I_{CM}\, \omega^2 + ½\, M\, v_{CM}^{\ 2}$

$U_{gi} = Mgh$

$U_{gf} = E_{ci} = 0$

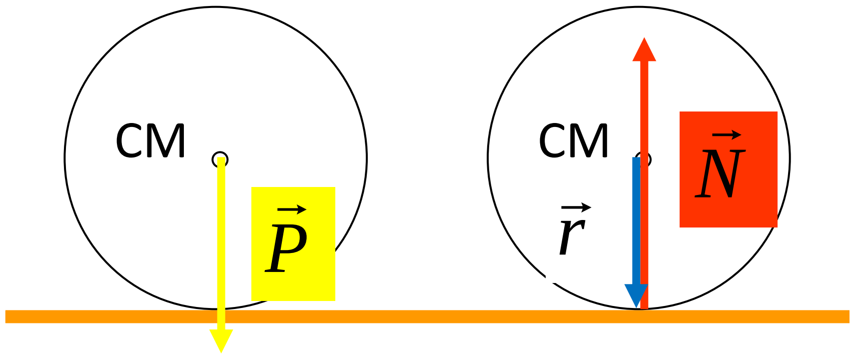


As Forças que Originam o Rolamento

Roda como ?

Um corpo pode rodar a velocidade constante, em torno de um eixo que passe pelo CM sem haver forças aplicadas, nem momentos dessas forças

Momento de que força para acelerar?



$$\vec{\tau}_{CM}(\vec{P}) = 0 \qquad \vec{\tau}_{CM}(\vec{N}) = 0$$

As Forças que Originam o Rolamento

Momento de que força para acelerar?

Para acelerar **Para desacelerar**

$\odot\ \vec{\tau}_{CM}(\vec{F}_a)$

x $\vec{\tau}_{CM}(\vec{F}_a)$

$$\left|\vec{\tau}_{CM}(\vec{F}_a)\right| = RF_a$$

Para manter rolamento a velocidade constante

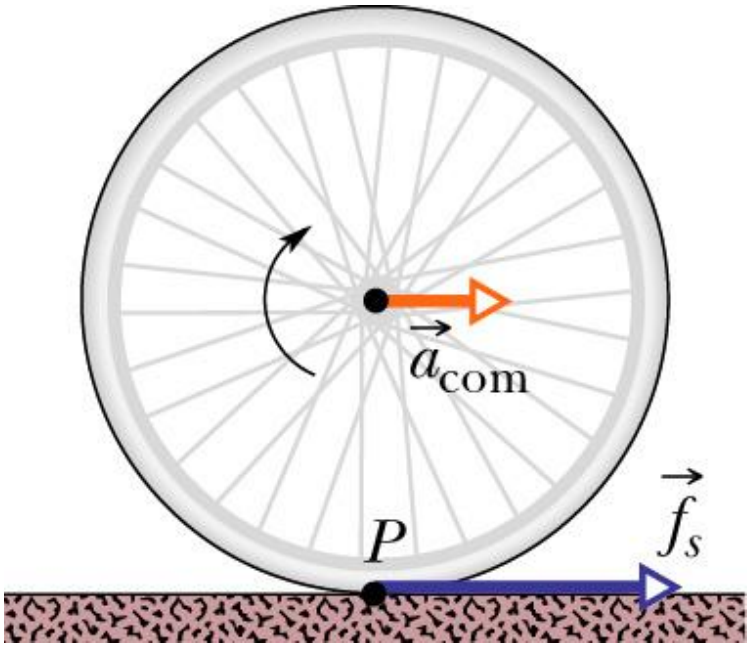
$$\left|\vec{\tau}_{CM}(\vec{F}_a)\right| = RF_a$$

A força de atrito evita o escorregamento do ponto de contacto para a esquerda na primeira situação e para a direita na terceira

Força de atrito estático - velocidade do ponto de contacto relativa ao plano é igual a zero, quando não escorrega ou desliza

As Forças que Originam o Rolamento

Uma roda rola horizontalmente sem escorregar com aceleração linear $\vec{a}_{\mathrm{CM}}$



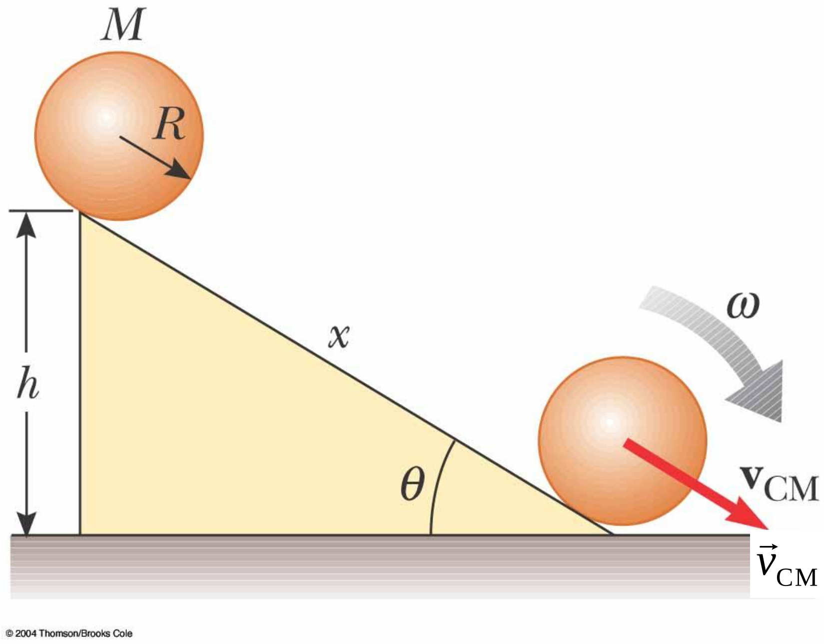
Uma força de atrito estático actua na roda em *P*, opondo-se à tendência para escorregar:

$$a_{\mathrm{CM}} = \alpha R$$

As Forças que Originam o Rolamento

Só é possível movimento acelerado de rolamento se existe atrito entre o plano inclinado e a esfera;

O atrito dá origem ao momento de força que provoca a rotação.



As Forças que Originam o Rolamento

As forças que actuam no corpo são a força gravítica $\vec{F}_g$, a força normal $\vec{N}$ e uma força de atrito $\vec{f}_s$ que aponta no sentido da subida da rampa

$$x: \quad f_s - Mg\sin\theta = Ma_{\text{CM}}$$

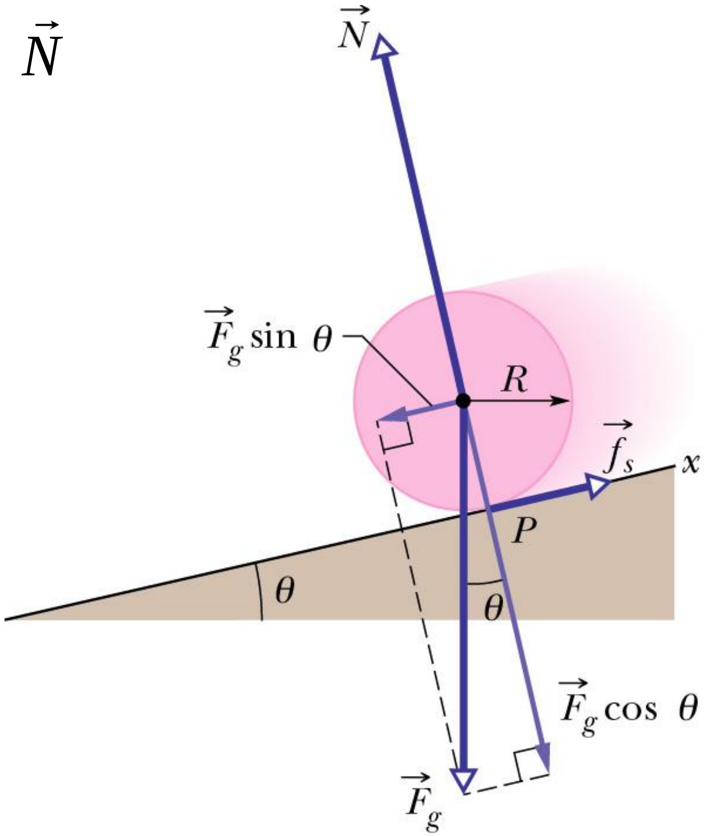
Momento de força:

$$Rf_s = -I_{\text{CM}}\alpha$$

$$a_{CM} = -\alpha R$$

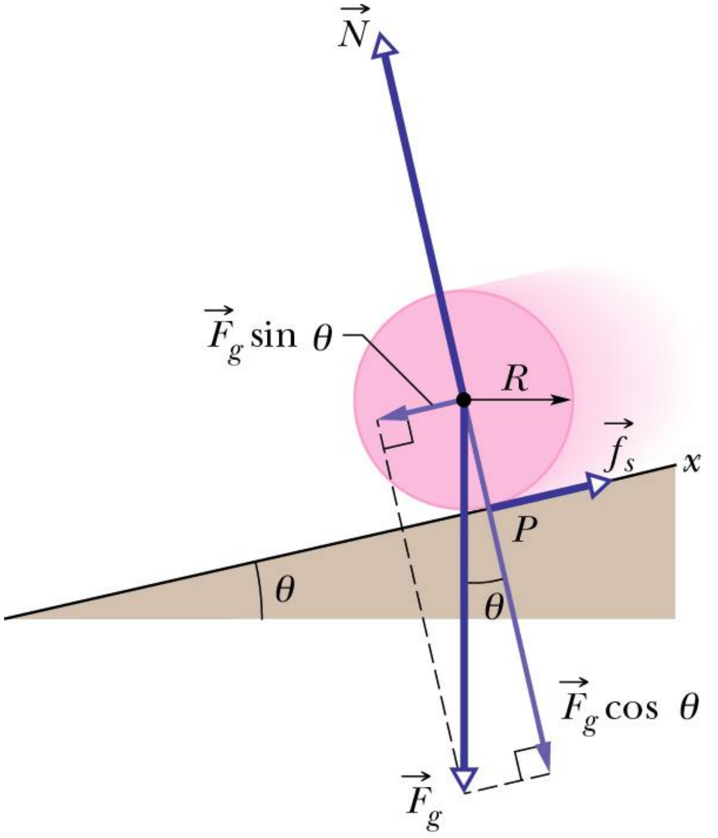
$$f_s = -I_{\text{CM}}\frac{a_{\text{CM}}}{R^2}$$

$$a_{\text{CM}} = -\frac{g\sin\theta}{1-\frac{I_{\text{CM}}}{MR^2}}$$



As Forças que Originam o Rolamento

A força de atrito no rolamento puro **é determinada pela dinâmica do movimento.**



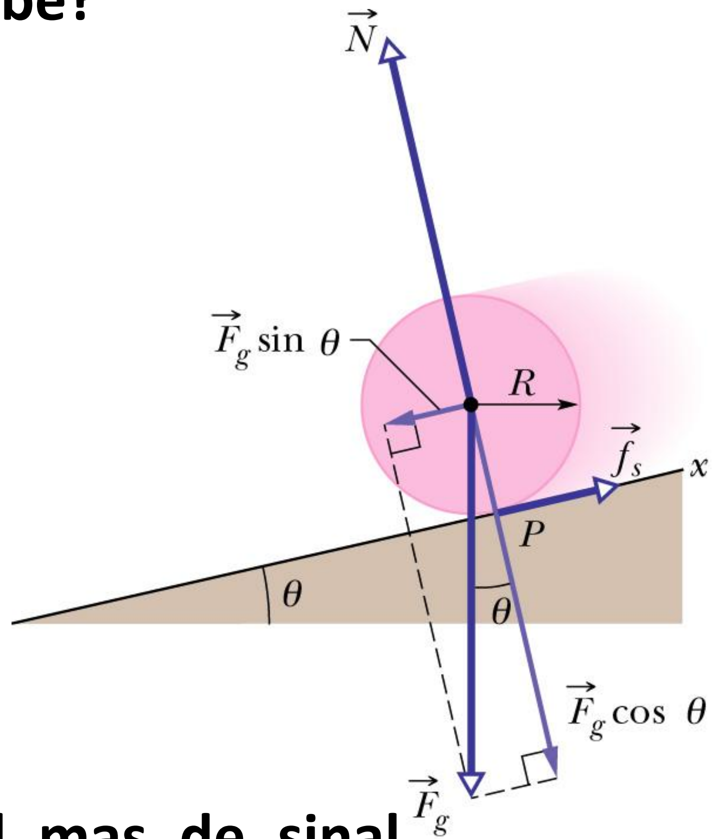
As Forças que Originam o Rolamento

O cilindro rola por um plano inclinado acima. A sua velocidade inicial de rotação era ω_0. A que altura sobe?

$$\frac{1}{2}I\omega_0{}^2 + \frac{1}{2}mv_0{}^2 = mgh$$

$$\frac{1}{4}mR^2\omega_0{}^2 + \frac{1}{2}mR^2\omega_0{}^2 = mgh$$

$$h = \frac{3R^2\omega_0{}^2}{4g}$$

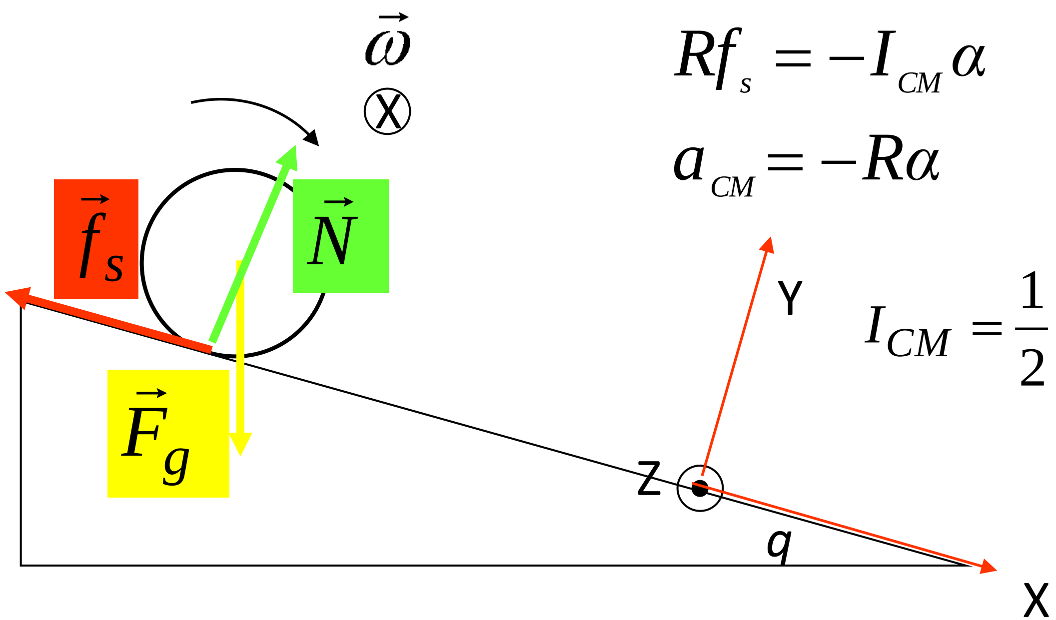


Conservação de energia mecânica ??

O atrito faz trabalho na rotação igual mas de sinal contrário ao que faz na translação

Exercício

Um cilindro é deixado sem velocidade inicial num plano inclinado. Qual é o valor mínimo do coeficiente de atrito para que faça um movimento de rolamento puro sem deslizar?



$$Mg\sin\theta - f_s = Ma_{CM}$$

$$Rf_s = -I_{CM}\alpha$$

$$a_{CM} = -R\alpha$$

$$I_{CM} = \frac{1}{2}MR^2$$

$$f_s = \frac{1}{2}Ma_{CM}$$

$$a_{CM} = \frac{2}{3}g\sin\theta$$

$$f_s = \frac{1}{3}Mg\sin\theta$$

$$f_s = \mu_s Mg\cos\theta$$

$$\mu_s = \frac{1}{3}\tan\theta$$